Il teorema di Steiner-Lemus.

Cenni storici.

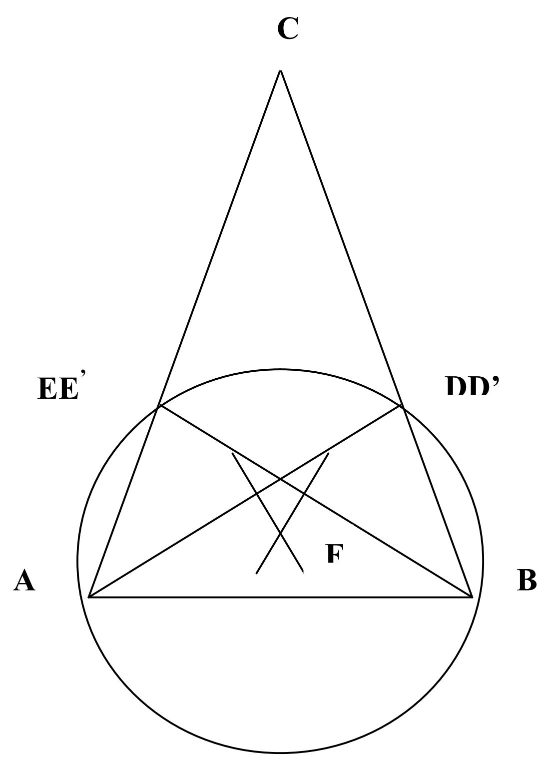
Il teorema prende il nome dai matematici Jakob Steiner (svizzero - 1796-1863) Daniel Christian Ludolf Lehmus (tedesco - 1780-1863).

Il problema di dimostrare che un triangolo con due bisettrici uguali sia isoscele sembra che sia stato proposto per la prima volta nel 1840 da Lehmus a Steiner e perciò da essi prese il nome.

Di questo teorema sono state proposte dimostrazioni algebriche, trigonometriche e "per assurdo" (la maggior parte dei matematici odia le dimostrazioni per assurdo) tra cui una nel 1844 attribuita allo stesso Steiner, seguita da un'altra nel 1850 attribuita a Lehmus, ma di queste non si trovano tracce. Si ha notizia, peraltro incerta, di una prima dimostrazione diretta del teorema (sempre per assurdo) proposta nel 1970. L'unica dimostrazione di tipo euclideo che si riesce a rintracciare sul web (www.lorenzoroi.net) è troppo lunga e di difficile comprensione per gli studenti.

La dimostrazione che presento per la prima volta ha il pregio (mi si scusi la presunzione) di essere breve, quindi immediata e di facile comprensione.

Teorema: se due bisettrici di un triangolo sono congruenti il triangolo è isoscele.



Ipotesi:

AD e BE sono le bisettrici[1] del triangolo relative ai vertici A e B;
AD = BE[2].

Tesi:

Il triangolo ABC è isoscele sulla base AB.

Dimostrazione:

Basta provare che ∠CAB e ∠CBA sono congruenti. A questo proposito tracciamo la circonferenza passante per i punti A, E e D (si ricorda che per tre punti non allineati passa sempre una ed una sola circonferenza) e quella passante per i punti B, D' ed E' (EE' è l'estremo di una delle bisettrici e DD' è estremo dell'altra). Ricordiamo, inoltre, che due circonferenze aventi due punti in comune possono essere tra loro solo secanti o coincidenti. Se le due circonferenze fossero tra loro secanti E non coinciderebbe con E' e D non coinciderebbe con D'; poiché tali coppie di punti coincidono per costruzione, allora le due circonferenze, non potendo essere secanti, risultano coincidenti. A questo punto tracciati gli assi[3] delle bisettrici AD e BE, osserviamo che la loro intersezione F è il centro dell'unica circonferenza passante per A, B, D ed E (ricordiamo ancora che l'asse di una corda passa per il centro) e perciò è equidistante da A, B, D ed E. Gli angoli ∠EAD e ∠EBD, insistendo sullo stesso arco ED della circonferenza di centro F, sono congruenti[4]. Poiché, per ipotesi, AD ed EB sono bisettrici di ∠CAB e ∠CBA, anche questi sono congruenti, e, pertanto in triangolo ABC è isoscele.

C.V.D.

---

[1] La bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo.

[2] Per la dimostrazione bisogna necessariamente usare entrambe le ipotesi, altrimenti la dimostrazione stessa risulterebbe carente; infatti, se si rinunciasse ad usare la prima ipotesi si giungerebbe alla strana conclusione che vedrebbe isosceli tutti i triangoli con due segmenti uguali congiungenti i vertici con i lati opposti.

[3] L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi di un segmento.

[4] Se le bisettrici non fossero congruenti i due punti D ed E apparterrebbero a due circonferenze diverse entrambe passanti per A e B e gli angoli EAD e EBD determinati dalle due bisettrici e dai lati del triangolo non insisterebbero sullo stesso arco e, perciò, non potrebbero essere confrontati